VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

# О смешанных методах конечных объемов*

В.П.Ильин
*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, e-mail:ilin@sscc.ru*

**Аннотация**

Рассматриваются смешанные методы конечных объемов (МКО) для аппроксимации смешанных краевых задач для дифференциальных уравнений относительно скалярных и векторных неизвестных функций. На примерах диффузионно-конвективных уравнений и задачи Стокса приводится мотивировка использования разнесенных сеток. Рассматриваются некоторые аппроксимационные и алгебраические свойства получаемых систем сеточных уравнений, необходимые для анализа сходимости приближенных решений в векторных нормах и оценки требуемого количества итераций.

## 1 Введение

Смешанными методами конечных элементов (МКЭ) и МКО называются такие, которые позволяют аппроксимировать одновременно как искомые решения, так и их производные или потоки. По различным свойствам и взаимосвязям таких схем опубликовано большое количество работ, см., например, [1]-[3] и цитируемую там литературу. Традиционно смешанные МКО исследуются как приближения обобщенных постановок в специальных функциональных пространствах выбором различных базисов на конечных элементах разных типов. При этом итоговая эффективность методов определяется как скоростью сходимости приближенных решений к точному при стремлении характерного шага сетки $h$ к нулю, так и спектральными (а также структурными) свойствами получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), обуславливающих быстроту применяемых для их решения итерационных алгоритмов.

Целью данной работы является построение унифицированных и экономичных смешанных методов конечных объемов для различных видов скалярных и векторных краевых задач на разного типа сетках как естественного принципа аппроксимации законов сохранения с определением классических сеточных решений и дискретных аналогов их производных или потоков. Предлагаемая методика основывается на вычислениях локальных матриц баланса и сборки глобальных матриц (аналогично поэлементной технологии МКЭ). Для диффузионно-конвективных уравнений это приводит к безусловно монотонным схемам экспоненциального типа, см. [4, 5]. Аппроксимация задачи Стокса осуществляется на разнесенных (staggered) сетках с определением различных ячеек Дирихле-Вороного для разных компонент скоростей и давления. Предлагаемый подход допускает естественное обобщение рассмотренных примеров на решение многомерных смешанных начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений в сложных расчетных областях с использованием различных типов сеток.

## 2 Одномерные модельные примеры

Рассмотрим аппроксимацию смешанной краевой задачи

$$-(au')' = f(x), \quad c = x_0 < x < x_{I+1} = d, \quad u_0 = b_0, \quad u'_{I+1} = b_{I+1}, \tag{1}$$

на неравномерной сетке $x_{i+1} = x_i + h_i$, $i = 0, 1, ..., I$. Вводя обозначение потока $v = -au'$, исходную задачу записываем при $a(x) > 0$ в смешанной постановке, представляемой системой

*Работа поддержана грантом РФФИ N 02-01-01176.

двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{1}{a}v + u' = 0, \quad v' = f. \tag{2}$$

Интегрируя первое и второе уравнения (2) по интервалам $(x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, ..., I$ (называемым в МКЭ конечными элементами) и $(x_{I+1/2}, x_{I+1})$, $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $i = 1, 2, ..., I$ (которые фактически являются ячейками Дирихле-Вороного), соответственно с помощью простейших квадратурных формул получаем соотношения

$$\begin{array}{l} \frac{h_i}{a_{i+1/2}} v_{i+1/2} + u_{i+1} - u_i = \psi^v_{i+1/2}, \quad a_{i+1/2} = h_i / \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{a(x)}, \\ v_{i+1/2} - v_{i-1/2} = g_i + \psi^u_i, \quad g_i = (f_i + f_{i+1/2})\frac{h_i}{2} + (f_i + f_{i-1/2})\frac{h_{i-1}}{2}, \\ -v_{I+1/2} = g_{I+1} + \psi^u_{I+1}, \quad g_{I+1} = (f_{I+1/2} + f_{I+1})\frac{h_I}{2} + a_{I+1}b_{I+1}, \end{array} \tag{3}$$

где $u_i = u(x_i)$, $v_{i\pm1/2} = v(x_{i\pm1/2} = (x_i + x_{\pm})/2)$, а $\psi^u_i$, $\psi^v_{i+1/2} = 0(h^3)$ суть погрешности аппроксимации численного интегрирования в первом уравнении и численного дифференцирования – во втором. Отбрасывая их, из (3) получаем систему для сеточных функций $u^h_i$, $v^h_{i\pm1/2}$:

$$\begin{array}{l} \frac{h_i}{a_{i+1/2}} v^h_{i+1/2} + u^h_{i+1} - u^h_i = 0, \quad u^h_0 = b_0, \\ v^h_{i+1/2} - v^h_{i-1/2} = g_i, \quad i = 1, 2, ..., I, \quad v^h_{I+1/2} = g_{I+1}. \end{array} \tag{4}$$

Из (3), (4) следуют уравнения для погрешностей сеточных уравнений $z^u_i = u_i - u^h_i$, $z^v_{i-1/2} = v_{i-1/2} - v^h_{i-1/2}$:

$$\begin{array}{l} \frac{h_i}{a_{i+1/2}} z^v_{i+1/2} + z^u_{i+1} - z^u_i = \psi^v_{i+1/2}, \quad i = 0, 1, ..., I, \quad z^u_0 = 0, \\ z^v_{i+1/2} - z^v_{i-1/2} = \psi^u_i, \quad i = 1, 2, ..., I, \quad -z^v_{I+1/2} = \psi^u_{I+1}. \end{array} \tag{5}$$

Непосредственно из (5) следуют явные выражения для ошибок:

$$\begin{array}{l} z^v_{i-1/2} = \sum\limits_{k=i}^{I+1} \psi^u_k = O(h^2), \quad z^u_1 = \psi^v_{1/2} - \frac{h_0}{a_{1/2}} z^v_{1/2} = O(h^3), \\ z^u_{i+1} = \psi^v_{i+1/2} + z^u_i - \frac{h_i}{a_{i+1/2}} z^v_{i+1/2} = O(h^2), \quad i = 1, ..., I. \end{array} \tag{6}$$

Таким образом, в данном случае тривиальным образом получен известный результат (см. например, [6]): погрешности и самих решений, и их производных имеют второй порядок по $h$, при выбранном спомобе аппроксимации, даже на неравномерной сетке. Более того, формулы (6) показывают, что ошибки $z^v_{i-1/2}$ и $z^u_i$ равны $O(h^3)$ вблизи правой и левой границ соответственно. Сделаем два методических замечания к рассмотренному примеру. Первое – учет краевых условий и первого, и второго рода в данном случае осуществляется точно, без привнесения какой-либо дополнительной ошибки при аппроксимации задачи. второе — дискретные (сеточные) значения решения $u^h_i$ и $v^h_{i+1/2}$ определены в различных точках.

Вводя векторы $u^h = (u^h_1, ..., u^h_{I+1})^t$, $v^h = (v^h_{1/2}, ..., v^h_{I+1/2})^t$, $g^h = (g_1, ..., g_{I+1})^t$, систему уравнений (4) можно записать в матричной форме, характерной для задач с седловой точкой:

$$\left[ \begin{array}{cc} A & B^t \\ -B & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v^h \\ u^h \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ g^h \end{array} \right], \ A = diag\{\frac{h_i}{a_{i+1/2}}\}, B = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 & -1 \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{array} \right]. \tag{7}$$

Стандартный путь к решению системы (7) (метод Узавы) заключается в исключении неизвестного вектора $v^h$, после чего для $u^h$ получается уравнение

$$Mu^h = BA^{-1}B^t u^h = g^h, \tag{8}$$

матрица $M$ которого в данном случае является трехдиагональной стилтьесовой.

Отметим, что если при аппроксимации уравнений (2) искомое дискретное решение и поток определить в узлах сетки $x_i$, то мы вместо системы (3) получим соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{h_i + h_{i+1}}{2a_i} v_i^h + \frac{1}{2}(u_{i+1}^h - u_{i-1}^h) = 0, \\ &\frac{1}{2}(v_{i+1}^h - v_{i-1}^h) = g_i, \end{aligned} \tag{9}$$

которые имеют тот же порядок локальной погрешности, но кардинально отличаются по алгебраическим структурным свойствам. Так, если из (9) исключить величины $v_i^h$, то для вектора $u^h$ получаем распадающуюся систему уравнений

$$\frac{a_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}(u_i^h - u_{i+2}^h) + \frac{a_{i-1}}{h_{i-2} + h_{i-1}}(u_i^h - u_{i-2}^h) = 2g_i,$$

в которой уравнения для четных и нечетных индексов не зависят друг от друга.

Результаты, аналогичные рассмотренным, можно получить для задач с другими краевыми условиями и с уравнениями, содержащими первые производные.

Представляет интерес рассмотреть аппроксимацию той же самой задачи (1) с помощью МКО на сетке с центрированными ячейками (cell centered grid). В этом случае исходное уравнение также интегрируется по интервалу $\Delta_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, однако узлы $x_i$ и шаги сетки $h_i$ определяются по другому: $x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2$, $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2} = x_i + h_{i+1/2} = x_i + (h_i + h_{i+1})/2$. Другими словами, здесь исходным является разбиение расчетной области на конечные объемы $\Delta_i$, а соответствующие узлы сетки определяются в их серединах. При этом после перехода к смешанной постановке (2) вместо аппроксимаций (3) получаем выражения

$$\begin{aligned} &\frac{h_{i+1/2}}{a_{i+1/2}} v_{i+1/2} + u_{i+1} - u_i = \psi_{i+1/2}^v = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{4} f'(x_{i+1/2}) + O(h^3), \\ &v_{i+1/2} - v_{i-1/2} = f_i h_i + \psi_i^u, \quad \psi_i^u = \frac{h_i^3}{24} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]. \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия в данном случае аппроксимируются уравнениями

$$u_0 + u_1 = \psi_1^{1/2} = O(h^2), \quad v_{I+1/2} = 0,$$

что соответствует выбору узлов $x_0 = c - h_1/2, \quad x_{I+1/2} = d$.

Важно отметить, что если из этих соотношений исключить $v_{i+1/2}$, то для неизвестных $u_i$ получаем сеточные уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_i}\Big[\frac{a_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}(u_i - u_{i+1}) + \frac{a_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}(u_i - u_{i-1})\Big] = f_i + \psi_i, \\ &\psi_i = \frac{1}{h_i}\Big[\frac{a_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}\psi_{i-1/2}^v - \frac{a_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}\psi_{i+1/2}^v + \psi_i^u\Big] = O(1), \end{aligned}$$

которое имеют локальную погрешность порядка единицы, т.е. формально никак не аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение (1)!

Однако детальный анализ ошибок решений $z_i^u$ и ошибок потоков $z_{i\pm 1/2}^v$, удовлетворяющих аналогичной (5) системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{h_{i+1/2}}{a_{i+1/2}} z_{i+1/2}^v + z_{i+1}^u - z_i^u = \psi_{i+1/2}^v, \quad i = 0, 1, ..., I-1, \quad z_0^u = 0, \\ &z_{i+1/2}^v - z_{i-1/2}^v = \psi_i^u, \quad i = 1, 2, ..., I, \quad z_{I+1/2}^v = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

позволяет показать, что они имеют обе второй порядок по $h$! Действительно, непосредственно из (11) имеем

$$\begin{aligned} &z_{i-1/2}^v = -\sum_{i=i}^{I} = O(h^2), \quad z_{i+1}^u = \sum_{j=0}^{i}(\psi_{j+1/2}^v - \frac{h_{j+1/2}}{a_{j+1/2}} z_{j+1/2}^v = \\ &= \frac{-1}{4}\Big[h_1^2 f'_{3/2} + h_2^2(f'_{5/2} - f'_{3/2}) + ... + h_i^2(f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2})\Big] + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

Повидимому, впервые этот факт был доказан (с помощью достаточно сложной техники) В.В.Смеловым в [7], а затем в работах М.Уиллер и других авторов, см. например, [8].

Описанные выше результаты можно считать идеальными в том смысле, что минимальными средствами получен максимальный эффект: второй порядок точности в равномерной норме на неравномерной сетке.

# 3 Экспоненциальные МКО-аппроксимации диффузионно-конвективных уравнений

Мы рассмотрим аппроксимацию скалярного диффузионно-конвективного уравнения

$$\nabla\lambda\nabla\varphi + \nabla(\vec{u}\varphi) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{12}$$

где $\vec{x}$ есть радиус-вектор точки в ограниченной области $\Omega$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и замыканием $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\vec{u}$ есть предполагаемый известным вектор скоростей, а $\lambda(\vec{x}) > 0$ – кусочно гладкий коэффициент. Для простоты остановимся на двумерной задаче с однородным условием Дирихле $\varphi|_\Gamma = 0$, однако приводимые ниже описания справедливы и для более общих задач.

Пусть $P_n$, $n = 0, 1, ..., \bar{N}$ – множество узлов сетки $\bar{\Omega}^h$, в которое входят все угловые точки границы $\Gamma$. Пусть $V_n$ – ячейка Дирихле-Вороного для точки $P_n$ с поверхностью $S_n = \underset{n'}{U} S_{n,n'}$ ($n' \in \omega_n$, где $\omega_n$ – множество узлов, соседних к $P_n$, их число обозначим через $N_n$), а $d_{n,n'}$ и $S_{n,n'}$, $n' = 1, ..., N_n$ – расстояния (отрезки) до соседних точек и соответствующие грани ячейки (которые перпендикулярны сеточным отрезкам $d_{n,n'}$ и проходят через их середины). Если $P_n$ есть граничный узел, то под $V_n$ понимается ее часть, лежащая в $\Omega$, т.е. $V_n \cap \Omega$. Обозначим через $E_l$ конечный элемент (многогранник), имеющий ребрами $d_{n,n'}$ – отрезки, соединяющие узлы-вершины данного элемента, разбиваемый на принадлежащие разным сеточным ячейкам подэлементы $E_{l,k} = E_l \cap V_k$, $k \in \bar{\omega}_l$, где $\bar{\omega}_l$ – множество вершин $E_l$ (их количество обозначаем через $m_l$).

Пример построения ячеек Вороного и треугольных элементов приведен на рис. 1.

Рис. 1. Иллюстрация к построению сеточных ячеек и элементов

Обозначая через $\vec{q} = -\lambda\nabla\varphi + \vec{u}\varphi$ вектор плотности потока субстанции и интегрируя уравнение (12) по каждой из ячеек $V_n$, получаем в определенном смысле смешанную постановку

$$\sum_{n' \in \omega_n} \int\limits_{S_{n,n'}} q_{n,n'} ds = \int\limits_{V_n} f dv, \quad q_{n,n'} + \lambda\nabla_{n'}\varphi - u_{n,n'}\varphi = 0, \tag{13}$$

где $q_{n,n'}$ и $u_{n,n'}$ означают длины проекций векторов $\vec{q}$ и $\vec{u}$ на отрезок $d_{n,n'}$, соответствующие его середине, а градиент берется в направлении внешней нормали $S_{n,n'}$. После интегрирования второго уравнения в (13) вдоль отрезка $d_{n,n'}$ и применения простейших квадратурных формул приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & q_{n,n'} - b^n_{n,n'}\varphi_n + b_{n',n}\varphi_{n'} = \psi^\varphi_{n,n'} = O(h^2), \\ & \sum_{n' \in \omega_n} s_{n,n'} q_{n,n'} = V_n f_n + \psi^q_{n,n'}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $s_{n,n'}$ и $V_n$ означают длины сторон и площади ячеек, а погрешность $\psi^q_{n,n'}$ равна $O(h^3)$ на равномерной сетке и $O(h^2)$ в общем случае. Величины $q_{n,n'}$ здесь интерпретируются как значения плотностей потоков в центрах соответствующих отрезков, а коэффициенты $b^n_{n,n'}$ и $b_{n',n}$ имеют вид

$$b^n_{n,n'} = u_{n,n'}/(1 - exp(-c_{n,n'})), \quad b_{n',n} = u_{n,n'}/(exp(c_{n,n'}) - 1),$$
$$c_{n,n'} = \frac{2d_{n,n'}u_{n,n'}}{\lambda_n + \lambda_{n'}}.$$

Опуская в (14) остаточные члены, для сеточных решений $q^h = \{q^h_{n,n'}\},\ \varphi^h = \{\varphi^h_n\}$ получаем систему

$$q^h + B\varphi^h = 0,$$
$$-Cq^h = f^h. \tag{15}$$

Отметим, что построение итоговой (глобальной) матрицы $M$ системы уравнений вида (8) эффективно реализуется на основе предложенной в [9] (см. также [4], [5]) поэлементной технологии МКО. При этом определяются и вычисляются локальные матрицы баланса – аналоги матриц жесткости в МКЭ, – из элементов которых осуществляется “сборка"полной матрицы. Данный подход принципиально упрощает логическую сложность алгоритмов при решении многомерных задач в сложных областях граничными условиями разных типов и кусочно-гладкими коэффициентами исходных уравнений, а также идеально приспособлен для распараллеливания.

# 4 Смешанный МКО для задачи Стокса

Мы рассмотрим в данном пункте ради простоты двумерную линейную задачу Стокса с однородными условиями Дирихле для скоростей ($\vec{u}|_\Gamma = 0$) в прямоугольной области (для давления $p$ никаких краевых условий на налагается, далее $\vec{x} = (x, y)$ и $\bar{u} = (u, v)$):

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u} + \nabla p = \bar{f}(\bar{x}), & \bar{x} \in \Omega, \\ -div\bar{u} = 0, & \bar{u}|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Аппроксимацию будем строить на неравномерной прямоугольной сетке

$$x_{i+1} = x_i + h^x_i, \quad y_{j+1} = y_j + h^y_j, \quad x_{i\pm1/2} = \frac{x_i + x_{i\pm1}}{2}, \quad y_{j\pm1/2} = \frac{y_j + y_{j\pm1}}{2},$$

на которой определяем различные ячейки Дирихле-Вороного для функций $p, u, v$:

$$V^p_{i,j} = \{x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}, \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}\},$$
$$V^u_{i,j} = \{x_i < x < x_{i+1}, \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}\},$$
$$V^v_{i,j} = \{x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}, \quad y_j < y < y_{j+1}\},$$

обозначенные на рис.2 соответственно косой, вертикальной и горизонтальной штриховками. Отметим, что сетка в данном случае выбирается так, чтобы граница области проходила по “скоростным"узлам.

Рис. 2. Узлы и конечные элементы $E^u$, $E^v$, $E^p$ разнесенной сетки для $u(x)$, $v(0)$ и $p(\cdot)$

В системе (14) три уравнения будем называть соответствующими по контексту функциям $u, v, p$. Интегрируя их по "своим"сеточным ячейкам $V^u_{i,j}$, $V^v_{i,j}$, $V^p_{i,j}$, применяя простейшие квадратурные формулы и обозначая $\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$, $h^y_j = (h_j + h_{j+1})/2$, получаем следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\hbar^y_j\Big(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i+3/2,j}}{\hbar^x_i} + \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\hbar^x_{i-1}}\Big) + h^x_i\Big(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j+1}}{h^y_j} + \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j-1}}{h^y_{j-1}}\Big)+ \\
&+(p_{i+1,j} - p_{i,j})\hbar^y_j = h^x_i \hbar^y_j f_{i+1/2,j} + \psi^u_{i,j}, \\
&h^y_j\Big(\frac{v_{i,j+1/2} - v_{i+1,j+1/2}}{h^x_i} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}}{h^x_{i-1}}\Big) + \hbar^x_i\Big(\frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j+3/2}}{\hbar^y_j} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\hbar^y_{j-1}} + \Big)+ \\
&\qquad +(p_{i,j+1} - p_{i,j})\hbar^x_i = h^y_j f_{i,j+1/2} + \psi^v_{i,j}, \\
&\quad (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})\hbar^y_j + (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})\hbar^x_i = \psi^p_{i,j}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Опуская в данных уравнениях остаточные члены $\psi^u_{i,j}$, $\psi^v_{i,j}$ и $\psi^p_{i,j}$, получаемую алгебраическую систему можно записать в виде

$$
\begin{bmatrix} -A & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^h \\ p^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^h \\ 0 \end{bmatrix},
$$

где матрицы $B^t$ и $B$, с точностью до нормировки, суть аппроксимации операторов градиента и дивергенции, $A$ – блочно-диагональная матрица, содержащая на главной диагонали МКО-аппроксимации оператора Лапласа, а $\bar{u}^h = (u^h, v^h)^t$ и $p^h$ – векторы скоростей и давления.

Отметим, что рассмотренная аппроксимация базируется фактически на трех разнесенных (staggered) сетках – отдельно для двух компонент скорости и для давления. Интуитивной аргументацией в пользу такого подхода является следующее: если в исходной системе (16) оператор $\Delta$ заменить на единичный (при этом задача Стокса трансформируется в уравнение диффузии), то сеточные уравнения (17) переходят в смешанную диффузионную постановку, соответствующую системе (15) при $\lambda = 1$ и нулевой скорости в уравнении (12), с соответствующей заменой функции $\varphi$ на $p$. В этом, и только этом, случае при дальнейшем исключении $u_{i\pm1/2}$ и $v_{i,j\pm1/2}$ мы получаем "классическую"пятиточечную систему уравнений со стилтьесовой матрицей.

# 5 Некоторые общие замечания

Рассмотренный подход к построению смешанных методов конечных объемов единообразно переносится на другие типы векторных краевых многомерных задач, описываемых системами дифференциальных уравнений с граничными условиями разных типов на различных участках границы. В работах [10], [11] соответствующие аппроксимации описаны и исследуются для

систем уравнений Навье-Стокса и упругости в трехмерном случае. Конструируемые при этом сеточные уравнения допускают простые модификации, обеспечивающие мультипликативный учет сингулярности искомых решений с известным асимптотическим поведением в окрестности особых точек, см. [4], [11], без изменения матричной структуры и основных свойств результирующей алгебраической системы.

Анализ сходимости приближенных решений к точному при $h \to 0$ и оценки погрешности в сеточных равномерной или евклидовой нормах несложно проводятся во многих случаях при сведении смешанной постановки к классической. Исследование же ошибок сеточных решений и их производных для непосредственно смешанных постановок, как это было сделано в п.2 для одномерных задач, в общем случае представляет собой открытую проблему.

Отметим в заключение, что для решения получаемых СЛАУ высокого порядка эффективными вычислительными инструментами оказываются итерационные методы неполной факторизации с ускорением обобщенными алгоритмами сопряженных градиентов, см. [4].

# Список литературы


[1] J.Baranger, J.-F.Maitre, F.Oudin. Connection between finite volume and mixed finite element methods.–Math. model. and analyses, v.30, N 4, 1996, 445-465.

[2] So.-H.Chou, Do.J.Kwak, K.Y.Kim. A general framework for construction and analyzing mixed finite volume methods on quadrilateral grids: the overlapping covolume case.–SIAM. J. Numer. Anal., v.39, N 4, 2001, 1170-1196.

[3] I.D.Mishev. Analysis of a new mixed finite volume method.–Comput. methods in applied math, v.1, N 1, 2001, 1-14.

[4] В.П.Ильин. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений.- Новосибирск, Изд. ИМ СО РАН, 2000.

[5] V.P.Il'in. On expontential finite volume approximations.-RJNAMM, v. 18, N 6, 2003, 479-508.

[6] В.П.Ильин. О сплайновых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений.– ЖВММФ, т.18, N 3, 1978, 620-627.

[7] В.В.Смелов. Лекции по теории переноса нейтронов.–М.: Атомиздат, 1978.

[8] A. Weiser, M.F.Wheeler. On convergence of block-centered finite-differences for elliptic problems.–SIAM J. Numer. Anal., 25, 1988, 351-375.

[9] Y.L.Gurieva, V.P.Il'in. On the finite volume technologyfor mixed boundary value problems.– Proceedings of AMCA-95, Novosibirsk, NCC Publ., 1995, 650-655.

[10] Y.L.Gurieva. On the numerical solution of 3D Navier-Stokes equation.–Proceed. ICCM-2004, Novosibirsk, NCC Publ., 2004, 852-857.

[11] В.С.Гладких, В.П.Ильин. Алгоритмы решения задач упругости при наличии трещины.– Труды МКВМ-2004, Новосибирск, изд. ИВМиМГ, 2004, 461-466.